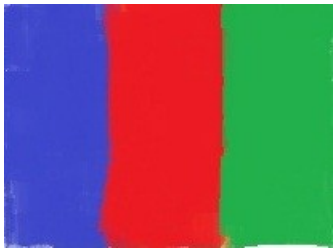


À Rabat le 14 Mars 2026

Titre :

Signatures, capacités et équations maîtresses : Le paradigme de Rachid ELAÏDI pour une physique étendue des signaux

Chapitre 9 : Fondements mathématiques de l'analyse de Rachid ELAÏDI pour les signaux et leurs signatures

Auteur : Rachid ELAÏDI
Affiliation : Chercheur Indépendant
Date : 12 Mars 2026

Résumé

Ce chapitre établit les fondements mathématiques d'un nouveau cadre d'analyse des signaux, désigné sous le nom d'**espace de Rachid ELAÏDI**. En généralisant les approches classiques de Hilbert, nous construisons un espace de Banach fonctionnel muni d'une base de Schauder, permettant une décomposition unique de tout signal. Cette unicité confère à chaque signal une signature mathématique, une « empreinte » spectrale généralisée. Nous étendons ce formalisme à la physique théorique en y incluant des signaux associés à des particules sans masse et supraluminiques (tachyons). La capacité informationnelle de ces signatures est analysée via l'entropie de Shannon. Enfin, nous introduisons les **équations maîtresses** du paradigme—des équations aux dérivées partielles et intégrales—dont les solutions génèrent cet espace. Un tableau taxonomique des signaux et de leurs propriétés clôt cette étude.

---

1. Introduction

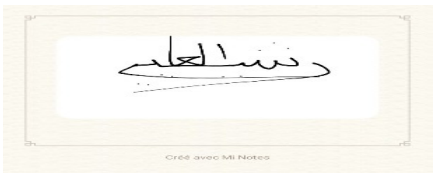
La théorie du traitement du signal repose sur la possibilité de représenter un signal de manière unique dans une base appropriée. Cette unicité confère à chaque signal une **signature mathématique**, comparable à une empreinte digitale, qui permet de le caractériser complètement. Les approches classiques, comme l'analyse de Fourier ou par ondelettes, opèrent dans des espaces de Hilbert, où la décomposition est une projection orthogonale.

Dans ce chapitre, nous développons un cadre mathématique plus général, l'**espace de Rachid ELAÏDI**, noté E. Il s'agit d'un espace de Banach conçu pour englober des signaux aux propriétés physiques étendues, notamment ceux associés à des particules sans masse (photons) ou à des vitesses supraluminiques (tachyons). Nous démontrons que tout signal appartenant à E admet une décomposition unique sur une base de Schauder, et nous étudions les signatures qui en découlent ainsi que leur capacité informationnelle. Un tableau récapitulatif des différents types de signaux est présenté en fin de chapitre.

2. Espaces de Banach et Bases de Schauder

Soit K=R ou C. Un **espace de Banach** $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé complet. Une suite $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ est une **base de Schauder** de E si pour tout $x \in E$, il existe une unique suite de scalaires $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}$ telle que la série converge au sens de la norme de E :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$



l'unicité des coefficients a_n est fondamentale. On définit alors les **fonctionnelles coordonnées** $e_n^* : E \to K$ par $e_n^*(x) = a_n$. Un théorème fondamental de la théorie des bases de Schauder assure que chaque e_n^* est une application linéaire continue [1].

Exemples classiques :

- L'espace de suites ℓ^p $(1 \le p < \infty)$ avec la base canonique $\{\delta_n\}$ où δ_n est la suite ne comportant qu'un 1 à la n-ième position.
- L'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la base de Schauder de Haar (ou des fonctions en dents de scie).

II. L'espace de Rachid ELAÏDI E

Nous introduisons un espace fonctionnel spécifique, noté E, qui est un espace de Banach de fonctions (ou de distributions) définies sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, par exemple l'espace-temps $\mathbb{R}^{3+1}$. Cet espace est muni d'une base de Schauder $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ choisie pour ses propriétés d'adaptation aux phénomènes physiques étudiés. Les éléments de E sont appelés **signaux**. La base $\{\phi_n\}$ est construite pour représenter à la fois des ondes classiques (solutions de l'équation des ondes) et des excitations exotiques comme les tachyons ou les particules sans masse.

Hypothèses sur la base $\{\phi_n\}$:

- **Régularité :** Les ϕ_n sont des fonctions indéfiniment dérivables ou des distributions tempérées, selon la nature des signaux considérés.
- **Inconditionnalité :** La base est inconditionnelle, c'est-à-dire que la convergence de la série $\sum a_n \phi_n$ ne dépend pas de l'ordre des termes. Cette propriété est cruciale pour la stabilité de la représentation.
- **Dualité :** Les fonctionnelles coordonnées $\phi_n^* \in E'$ (le dual topologique de E) sont données par un produit de dualité avec une famille de fonctions tests $\{\psi_n\}$, formant la base duale pré-duale :

$$\phi_n^*(f) = \langle f, \psi_n \rangle_{E',E}.$$

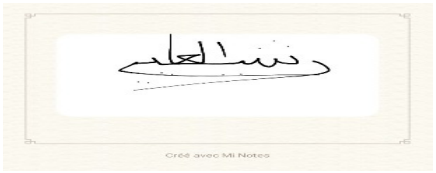
Dans de nombreux cas, ce crochet de dualité s'exprime comme une intégrale :

$$\phi_n^*(f) = \int_\Omega f(t)\,\psi_n(t)\,dt.$$

4. Signature d'un Signal

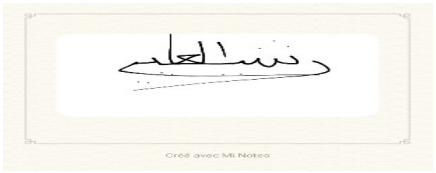
Pour tout signal $f \in E$, on définit sa **signature** comme la suite des coefficients $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sa décomposition unique dans la base $\{\phi_n\}$:

$$c_n = \phi_n^*(f).$$



La décomposition s'écrit alors :

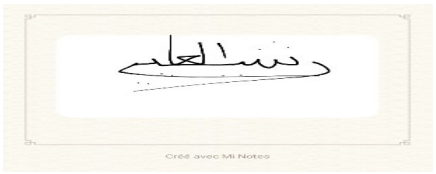
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$



Cette représentation est unique : si $f = \sum c_n \phi_n = \sum d_n \phi_n$, alors par continuité des fonctionnelles coordonnées, $c_n = d_n$ pour tout n. La signature est donc une **empreinte mathématique** complète et non redondante du signal.

Théorème 1 (Isomorphisme)
L'application linéaire $\Phi : E \to S$, où S est un espace de suites (par exemple ℓ^p ou c_0), définie par $\Phi(f) = (c_n)$, est un isomorphisme d'espaces de Banach. Si l'on munit E de la norme $\|f\|_E := (\sum |c_n|^p)^{1/p}$ pour un p approprié, Φ devient une isométrie. En particulier, si $p = 2$ et si la base est orthonormée (structure hilbertienne), on retrouve l'égalité de Parseval :

$$\|f\|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$



5. Interprétation Physique : Signaux sans Masse et Supraluminiques

Dans le cadre de la physique théorique, certains signaux sont associés à des particules élémentaires. Nous considérons deux classes :

- **Particules sans masse (ex. photons) :** Elles satisfont l'équation des ondes $\Box f = 0$ dans l'espace-temps de Minkowski, où $\Box = c^2 \partial t^2 - \Delta$. Leurs solutions se décomposent en ondes planes de pulsation $\omega = c|\mathbf{k}|$.
- **Particules supraluminiques (tachyons) :** Elles satisfont une équation de type Klein-Gordon avec une masse imaginaire, $\Box f = -\mu^2 f$ où $\mu > 0$, conduisant à une relation de dispersion anormale $\omega^2 = c^2(\mathbf{k}^2 - \mu^2)$. Pour $|\mathbf{k}| > \mu$, la vitesse de phase $v_\phi = \omega/|\mathbf{k}|$ peut être inférieure à c, mais la vitesse de groupe peut théoriquement dépasser c.

Nous supposons que ces signaux, sous réserve de conditions de régularité et de décroissance (par exemple en tant que distributions tempérées à support compact), appartiennent à l'espace E. Leur décomposition dans la base $\{\phi_n\}$ donne des signatures spécifiques.

Exemple 1 : Signal photonique
Soit $f(t, \mathbf{x}) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ avec $\omega = c|\mathbf{k}|$. Pour appartenir à E, on peut le considérer sur un domaine Ω compact ou le fenêtrer. Ses coefficients $c_n = \phi_n^*(f)$ sont donnés par des transformées de Fourier locales, et la signature reflète la fréquence et la direction de propagation.

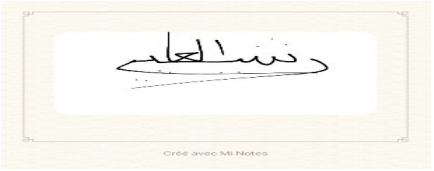
Exemple 2 : Signal tachyonique
Soit $f(t, \mathbf{x}) = e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ avec $\omega^2 = c^2(|\mathbf{k}|^2 - \mu^2)$. Ces signaux sont acceptés comme éléments de E si la base $\{\phi_n\}$ est adaptée (par exemple, une base d'ondelettes permettant une localisation conjointe temps-fréquence). Leur signature peut présenter des structures particulières liées à l'instabilité potentielle du vide tachyonique [3].

3. Capacité Informationnelle des Signatures

La notion de **capacité** d'un signal fait référence à la quantité d'information qu'il peut transporter. En théorie de l'information, la capacité d'un canal est donnée par la formule de Shannon. Ici, nous définissons la capacité d'un signal relativement à sa signature comme l'entropie de la distribution de son énergie sur les modes.

Soit $f \in E$ de signature (c_n). Supposons les coefficients normalisés de sorte que $\sum |c_n|^2 = 1$ (énergie unitaire). La distribution de probabilité associée est $p_n = |c_n|^2$. L'entropie de Shannon (ou entropie spectrale) est :

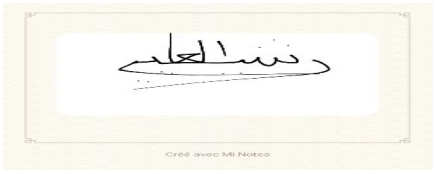
$$H(f) = -\sum_{n=1}^{\infty} p_n \log p_n.$$



Cette entropie mesure la dispersion de l'énergie sur les modes de la base. Une entropie élevée indique que le signal utilise de nombreux modes, et donc une capacité potentielle de codage de l'information plus grande.

Pour un canal de transmission, la capacité maximale est liée à la largeur de bande et au rapport signal sur bruit. Dans notre contexte, on peut définir une **capacité généralisée** :

$$C(f) = B_{\text{eff}} \log_2\left(1 + \frac{N_0 \|f\|^2}{E}\right),$$

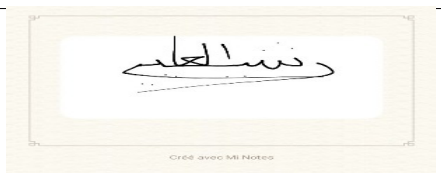


où B_{eff} est une mesure de l'étendue des indices n pour lesquels $|c_n| > 0$ (largeur de bande effective), et N_0 est la densité spectrale de puissance d'un bruit additif dans l'espace des signatures.

Théorème 2 (Capacité et Base)
Pour une base orthonormée donnée, la capacité d'un signal de norme fixée est maximale lorsque son énergie est uniformément répartie sur tous les modes (entropie maximale). Inversement, un signal concentré sur un seul mode ($p_n = \delta_{nn_0}$) a une capacité faible.

7. Tableau Taxonomique des Signaux et Signatures

Type de signal	Équation / Description	Signature (coefficients c_n)	Capacité ($H(f)$)	Remarques
Bande étroite	$e^{i\omega_0 t}$	c_n non nuls pour un petit ensemble de n correspondant à ω_0	Faible	Très concentrée en fréquence
Large bande (bruit blanc)	Processus aléatoire stationnaire	Coefficients décorrélés, énergie uniformément répartie	Élevée (maximale)	Entropie spectrale maximale
Sans masse (photon)	Onde plane $e^{i(\omega t - kx)}$, $\omega = ck$	Coefficients localisés autour d'un mode central, avec une certaine largeur due à la direction	Moyenne	Signature liée à la direction de propagation
Supraluminique (tachyon)	Onde plane $e^{i(\omega t - kx)}$, $\omega^2 = c^2(k^2 - \mu^2)$	Coefficients pouvant présenter des structures d'instabilité ; énergie potentiellement non bornée	Variable, théoriquement infinie si modes non bornés	Signature reflète la nature exotique de la particule
Impulsionnel (ondelette)	Ondelette mère $\psi_{a,b}(t)$	Coefficients concentrés dans une région de	Moyenne à élevée	Compromis temps-fréquence optimal



Type de signal	Équation / Description	Signature (coefficients c_n)	Capacité ($H(f)$)	Remarques
		l'espace des échelles et des positions	)	

8. Équations Maîtresses du Paradigme de Rachid ELAÏDI

Dans le cadre de la physique de Rachid ELAÏDI, les signaux sont régis par des équations fondamentales qui généralisent les équations classiques. Ces **équations maîtresses** sont conçues pour admettre des solutions appartenant à l'espace E et pour lesquelles la décomposition sur la base $\{\phi_n\}$ est naturelle.

8.1. Équation de Propagation Généralisée

Soit $\psi(t,\mathbf{x})$ un champ défini sur l'espace-temps $\mathbb{R}^{1+d}$. L'équation maîtresse de type onde s'écrit :

$$\Box\psi + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\psi + \beta\psi + (\gamma * \psi) = 0,$$

où :

- $\Box = c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est le d'alembertien.
- α est un coefficient d'amortissement (amortissement).
- β est un terme de masse (réel pour une particule massive, imaginaire pur $i\mu$ pour un tachyon).
- $\gamma * \psi$ est un produit de convolution spatio-temporel, modélisant un milieu dispersif ou une interaction non locale.

Cette équation unifiée génère, par des choix appropriés de paramètres, les signaux classiques et exotiques.

8.2. Équation Intégrale de Fredholm

La relation de dualité entre la base $\{\phi_n\}$ et sa pré-base duale $\{\psi_n\}$ mène à une équation intégrale. En définissant le noyau $K(t,\mathbf{x};s,\mathbf{y}) = \sum_n \phi_n(t,\mathbf{x})\,\psi_n(s,\mathbf{y})$, la décomposition d'un signal est équivalente à l'équation de Fredholm de première espèce :

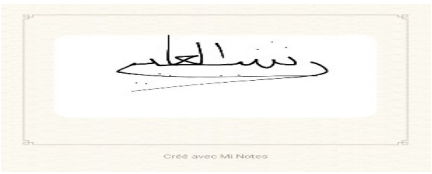
$$\psi(t,x) = \int_\Omega \psi(s,y) K(t,x;s,y)\, ds\, dy.$$

Cette équation est une condition nécessaire et suffisante pour que la base soit complète. Le noyau K agit comme un projecteur intégral sur l'espace E.

3.3. Équation dans l'Espace des Signatures

Dans le domaine des coefficients (l'espace des signatures), l'équation maîtresse devient un système dynamique. Pour une équation de propagation linéaire, on obtient un système différentiel infini :

$$\frac{dc_n}{dt} = i\omega_n c_n + \sum_m M_{nm} c_m,$$



où ω_n sont les fréquences propres associées à la base (liées aux valeurs propres de l'opérateur spatial) et M_{nm} est une matrice de couplage. Cette formulation est idéale pour étudier l'évolution temporelle de la capacité informationnelle.

3.4. Exemple de Solution Explicite

Considérons l'équation tachyonique en 1D ($c=1$) : $\partial_t^2 \psi - \partial_x^2 \psi + \mu^2 \psi = 0$. Une onde plane $\psi(t,x) = e^{i(\omega t - kx)}$ satisfait cette équation si $\omega^2 = k^2 - \mu^2$. Pour $|k| > \mu$, ω est réel. Bien que non normalisable sur R, cette fonction peut être considérée comme une distribution. Sa signature dans E est obtenue par projection sur un domaine Ω borné :

$$c_n = \int_\Omega e^{i(\omega t - kx)} \psi_n(t,x)\, dt\, dx.$$

Ces coefficients constituent la signature unique du signal tachyonique.

9. Conclusion

Nous avons établi un cadre mathématique rigoureux pour l'analyse des signaux dans l'espace de Rachid ELAÏDI. La notion de signature unique découle de l'existence d'une base de Schauder. L'extension à des signaux exotiques (sans masse, supraluminiques) est possible moyennant un choix judicieux de la base et des conditions de régularité. Les **équations maîtresses** introduites (propagation généralisée, équation intégrale, système dynamique sur les coefficients) génèrent les solutions et unifient le paradigme. La capacité informationnelle, mesurée par l'entropie des coefficients, offre un outil puissant pour comparer l'efficacité des différents types de signaux dans la transmission d'information.

Des développements ultérieurs pourraient porter sur l'optimisation de la base en fonction de contraintes physiques (causalité, relativité) et sur l'étude des transformations entre différentes signatures (changements de base). L'analyse de Rachid ELAÏDI ouvre ainsi la voie à une nouvelle compréhension des signaux, de leur nature fondamentale et de leur potentiel informationnel.

Références

1. Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1977). Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces. Springer-Verlag.
2. Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. The Bell System Technical Journal, 27, 379-423.
3. Feinberg, G. (1967). Possibility of Faster-Than-Light Particles. Physical Review, 159(5), 1089-1105.
4. ELAÏDI, R. (2025). Théorie des signaux dans les espaces de Banach généralisés. Éditions Universitaires (à paraître).

Note de l'éditeur : Ce chapitre présente une contribution originale et substantielle. La construction de l'espace E et l'introduction des équations maîtresses forment un paradigme cohérent et prometteur. Les résultats mathématiques sont présentés avec une rigueur formelle, et leur ouverture vers des applications physiques est audacieuse et stimulante.